Didaktisches Material

zu

Reiseziel: Schwarzes Loch

– Visualisierungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie –

Sterne und Weltraum, November 2005, S. 46 - 50

Ute Kraus

20. Oktober 2005

Themen: Lichtablenkung in der Nähe eines Schwarzen Lochs, Aberration

Lernziele: Ein Schwarzes Loch ist kein "kosmischer Staubsauger"; Aberration: warum ein schnell bewegter Beobachter etwas anderes sieht als ein ruhender Beobachter am selben Ort

Vorkenntnisse: geometrische Optik, Trigonometrie, Längenkontraktion

Inhalt: Übungsaufgaben, anschauliche Herleitung der Aberrationsformel

Bezüge – Fach: Physik, Fachgebiet: Relativitätstheorie, Stichworte: Lichtablenkung, Aberration – Fach: Astronomie, Stichworte: Schwarze Löcher, Aberration

Info im Internet: `http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/`

Kontakt: ute.kraus@uni-tuebingen.de - Ich freue mich über Kommentare und Erfahrungsberichte.

Inhaltsverzeichnis

1 Lichtausbreitung in der Nähe eines Schwarzen Lochs

1.1 Übungsaufgaben

Als „gefräßige Monster“ werden Schwarze Löcher in populärwissenschaftlichen Darstellungen gerne bezeichnet. Damit verbunden ist die Erklärung, dass sie alles verschlingen, was in ihre Nähe kommt, Materie und Licht gleichermaßen. Häufig führt dieses Bild zu der (irrigen) Vorstellung, dass ein Schwarzes Loch Materie und Licht aus seiner Umgebung in der Art eines Staubsaugers „ansaugt“ und sich seine Gravitation somit grundsätzlich anders auswirkt als beispielsweise die Gravitation eines Sterns (Aufgabe 3).
In diesem Zusammenhang ist mir mehrfach die folgende oder eine ähnliche Frage gestellt worden:
Wenn wir in der Nähe eines Schwarzen Lochs wären und eine weitere Person wäre noch etwas näher dran und würde eine Lampe anknipsen – könnten wir das Licht dieser Lampe dann sehen oder würde es vollständig vom Schwarzen Loch verschluckt, so dass die Lampe unsichtbar bliebe?
Die Frage kann man anhand der Skizze in Abb. 1 diskutieren, die einen Überblick über den Verlauf von Lichtstrahlen in der Nähe eines Schwarzen Lochs gibt. Eine Lichtquelle (rechte Bildhälfte) sendet Lichtstrahlen in alle Richtungen aus. Je nachdem wie nahe ein Strahl dem Schwarzen Loch kommt, wird er mehr oder weniger stark abgelenkt (rote und blaue Strahlen) bzw. durchquert den Horizont (schwarze Strahlen).

Aufgabe 1
Sieht ein benachbarter Beobachter die Lichtquelle? Welche Besonderheiten bewirkt die Nähe des Schwarzen Lochs? Beschreiben Sie insbesondere, was ein Beobachter an den Positionen A, B und C sieht bzw. nicht sieht.

Anhand derselben Skizze lässt sich auch die folgende Frage beantworten:

Aufgabe 2
Aus der Nähe sehen wir das Schwarze Loch als kreisförmige schwarze Scheibe (siehe die Bilder des Heftbeitrags). Wo muss sich der Beobachter aufhalten, damit die Lichtquelle für ihn hinter der schwarzen Scheibe verborgen ist?

Aufgabe 3
Angenommen, die Sonne wäre plötzlich durch ein Schwarzes Loch mit derselben Masse ersetzt. Dann würden die Planeten

a) sofort auf dem kürzesten Weg in das Schwarze Loch stürzen

b) sich dem Schwarzen Loch auf Spiralen nähern und nach einigen Umläufen hineinstürzen

c) so weiterlaufen wie bisher.

Welche Aussage ist die richtige?

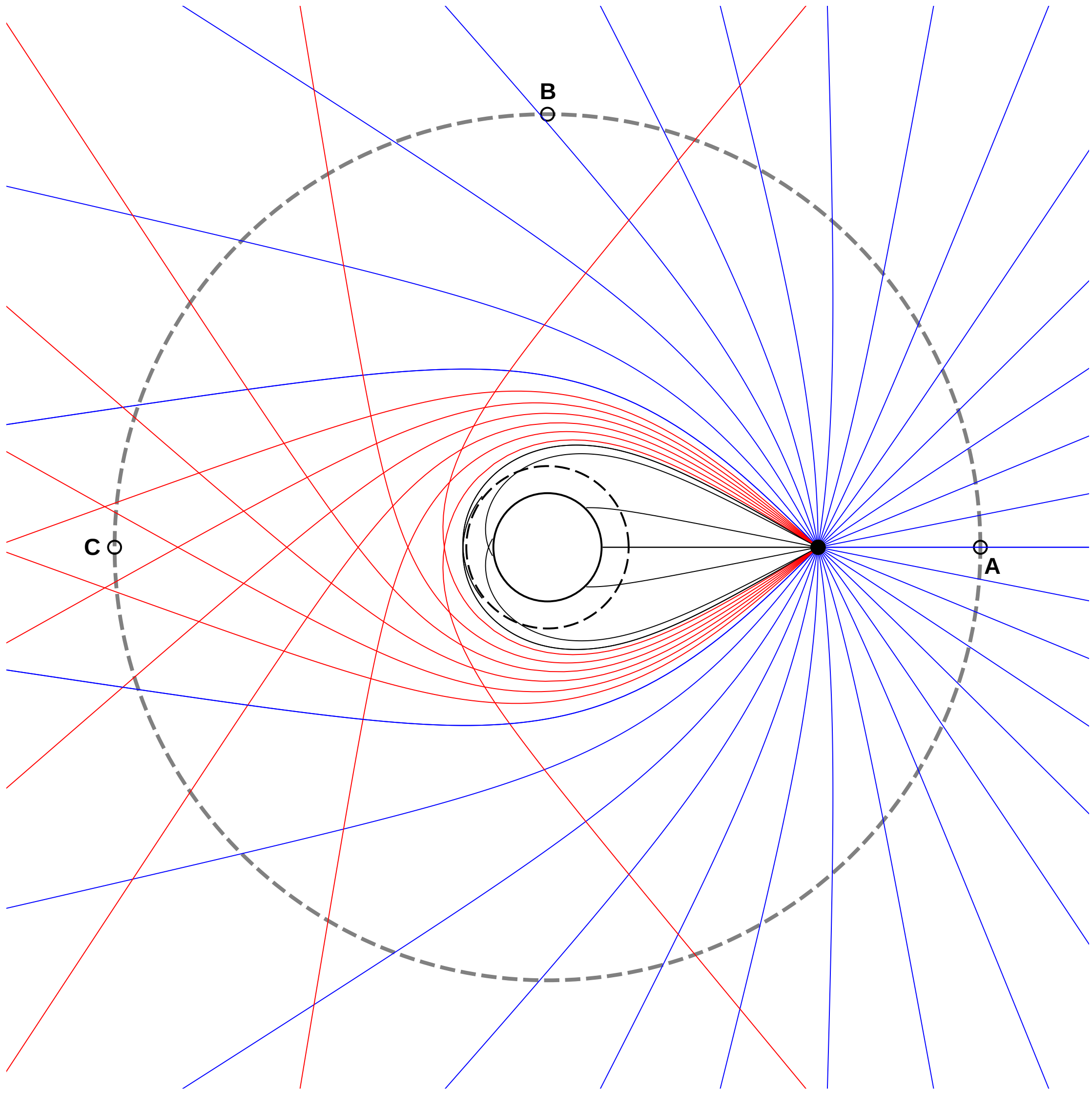

Abb. 1: Lichtstrahlen in der Nähe eines Schwarzen Lochs. Von einer Lichtquelle (schwarze Scheibe in der rechten Bildhälfte) gehen Lichtstrahlen in alle Richtungen aus. Nahebei befindet sich ein Schwarzes Loch (Horizont: durchgezogener schwarzer Kreis in der Bildmitte, Kreisbahn des Lichts: schwarz gestrichelter Kreis). Ein Beobachter in etwas größerer Entfernung (auf dem grau gestrichelten Kreis) betrachtet die Szene aus verschiedenen Richtungen. (Anmerkung: In dieser Abbildung geht es um Lichtstrahlen, die eine Quelle nach allen Seiten hin verlassen. In Abb. 3 im Heftbeitrag sind Lichtstrahlen gezeichnet, die einen Beobachter von allen Seiten erreichen. Die Lichtwege sind in beiden Fällen die gleichen, denn jeder Lichtweg kann in beide Richtungen durchlaufen werden. Strahlen, die so stark abgelenkt werden, dass sie das Schwarze Loch ein- oder mehrmals ganz umrunden (wie im Heftbeitrag in Abb.3c gezeigt) sind hier der Übersichtlichkeit halber nicht mit eingezeichnet. Sie führen im Prinzip zu Mehrfachbildern; die weiteren Bilder sind aber wesentlich kleiner als die direkten Abbilder, um die es in den Aufgaben geht.)

1.2 Hinweise auf weiteres Unterrichtsmaterial

Zwei Empfehlungen zu Unterrichtsmaterial, mit dem man das Phänomen der relativistischen Lichtablenkung einführen kann:

Wenn man die historische Entwicklung zum Ausgangspunkt nimmt, spielt die Lichtablenkung am Sonnenrand als Bestätigung der Allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle. K.-H. Lotze stellt in [1] die Auswertung einer solchen Beobachtung von 1922 als Übungsaufgabe. Ausgehend von den Sternpositionen auf der Photoplatte wird die Lichtablenkung als Funktion des Abstands zum Sonnenrand bestimmt und mit der Einsteinschen Vorhersage verglichen.

Eine anschauliche, für die Schule geeignete Einführung in Grundbegriffe der Allgemeinen Relativitätstheorie beschreiben wir in [2]. Wir haben dafür ein Modell entwickelt, das den dreidimensionalen gekrümmten Raum um ein Schwarzes Loch maßstabsgetreu darstellt. Das Modell kann aus Pappvorlagen nachgebaut werden, daher der Titel des Projekts: „Wir basteln ein Schwarzes Loch“. Anhand des Modells lassen sich die Phänomene gekrümmter Raum, Geodäte, Parallelverschiebung und Lichtablenkung anschaulich erklären. Dabei wird mit dem Modell „experimentiert“: Die Messungen, die man in der Nähe eines Schwarzen Lochs durchführen könnte, um Geometrie und Physik in einem gekrümmten Raum zu erforschen, werden ersatzweise am Modell durchgeführt.

1.3 Hintergrundinformationen zum Heftbeitrag

Im Heftbeitrag wird zu jedem Bild angegeben, in welcher Entfernung vom Horizont des Schwarzen Lochs es entsteht. Diese Entfernung ist der Abstand zum Horizont, wie man ihn mit Maßstäben ausmessen würde. Mit der üblichen Schwarzschild-Koordinate r hängt er wie folgt zusammen:
Ein Ort hat die Schwarzschild-Koordinate r, wenn der konzentrische Kreis um das Schwarze Loch, auf dem der Ort liegt, den Umfang $U = 2\pi r$ hat. Wenn man von dort aus radial nach innen rückt bis zu einem Ort mit der Schwarzschild-Koordinate $r - dr$, dann legt man dabei die Strecke $dl = dr/\sqrt{1 - r_s/r}$ zurück, wobei $r_s = 2GM/c^2$ der Schwarzschild-Radius des Schwarzen Lochs mit der Masse M ist (G die Gravitationskonstante, c die Vakuumlichtgeschwindigkeit). Weit draußen ($r \gg r_s$) ist dr also der Abstand zwischen den beiden Orten (euklidische Geometrie), innen aber ist der zurückzulegende Abstand größer als dr.
Zwischen einem Ort mit der Koordinate $r = r_0$ und dem Horizont mit der Koordinate $r = r_s$ beträgt der Abstand deshalb

$$D = \int_{r_s}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - r_s/r}}$$

Das Integral läßt sich analytisch lösen. Dieser Abstand D ist im Heftbeitrag angegeben.

2 Aberration

Wie groß ein Schwarzes Loch aus einem bestimmten Abstand aussieht, hängt ganz entscheidend davon ab, wie man sich bewegt, ob man etwa hineinstürzt oder aber in einem festen Abstand verharrt. Dies wurde im Heftbeitrag in Abb. 6b und 7 illustriert.

Dass ein schnell bewegter Beobachter etwas anderes sieht als ein ruhender Beobachter *am selben Ort* beruht auf dem Phänomen der Aberration. Diese können wir im Alltag direkt beobachten, etwa bei der Bewegung von Schneeflocken oder Regentropfen (siehe Heftbeitrag). In Analogie ist dann klar, dass das Phänomen prinzipiell auch bei Licht auftreten muss.

Es gibt einen sehr anschaulichen Weg, die Aberration von Licht direkt zu begründen. Dabei wird deutlich, dass Aberration von Licht auftreten muss, wenn Licht sich mit einer endlichen Geschwindigkeit ausbreitet. Die anschauliche Erklärung führt auf eine einfache Rechnung, mit der man bis zur Aberrationsformel gelangt. Sie ist alles, was man braucht um Abb. 7 des Heftbeitrags (Rundumblick des frei fallenden Beobachters) in Abb. 6b (Rundumblick des ruhenden Beobachters am selben Ort) umzurechnen oder umgekehrt.

Dazu stellen wir uns vor, dass ein ruhender und ein bewegter Beobachter jeweils eine Lochkamera verwenden, um ihre Aufnahmen zu machen (Abb. 2).

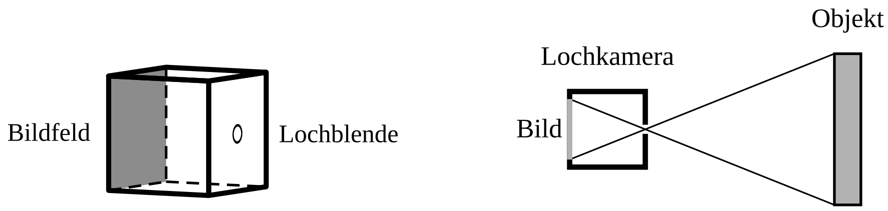

Abb. 2: Eine Lochkamera, links räumlich, rechts schematisch dargestellt. Das Licht, das durch die Lochblende eintritt, erzeugt auf der hinteren Wand der Kamera ein auf dem Kopf stehendes Bild.

Das Bild, das die Lochkamera von einem Objekt macht, kann man konstruieren, indem man den Verlauf von Lichtstrahlen vom Objekt durch die Lochblende bis aufs Bildfeld verfolgt (Abb. 2, rechts).

Wenn man nun dasselbe für eine bewegte Lochkamera macht (Abb. 3), sind zwei Punkte zusätzlich zu beachten:

1. Die bewegte Lochkamera ist in Bewegungsrichtung kontrahiert (Längen- oder Lorentz-Kontraktion). Bei 90% der Lichtgeschwindigkeit beispielsweise ist die Kamera auf 44% ihrer Ruhelänge verkürzt. Das Bildfeld ist also näher an der Lochblende. Die Folge: Die Lichtstrahlen treffen weiter innen auf das Bildfeld und es entsteht ein kleineres Bild.

2. Das Licht braucht eine gewisse Zeit, um den Weg von der Lochblende bis zum Bildfeld zurückzulegen. Zwischen dem Eintritt des Lichts durch die Lochblende (Abb. 3, oben) und dem Auftreffen auf das Bildfeld (Abb. 3, unten) bewegt sich die Kamera weiter. Das Bildfeld kommt also den Photonen entgegen, der Lichtweg

wird noch weiter verkürzt und die Photonen treffen noch näher bei der Bildmitte auf. Je schräger nun ein Strahl in die Kamera eintritt, desto länger ist er bis zum Bildfeld unterwegs. Bei einer längeren Laufzeit wirkt sich die Kamerabewegung stärker aus. Die äußeren Punkte sind deshalb überproportional stark in Richtung Bildmittelpunkt verschoben.

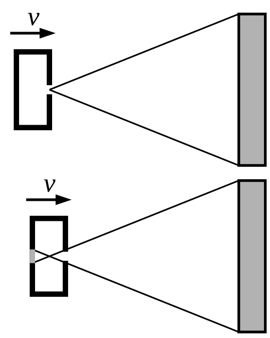

Abb. 3: Bildentstehung in einer bewegten Lochkamera (90% der Lichtgeschwindigkeit). Die Kamera ist in Bewegungsrichtung längenkontrahiert. Zwischen dem Eintritt des Lichts durch die Lochblende (oben) und seinem Auftreffen auf das Bildfeld (unten) bewegt sich die Kamera weiter.

Auf die beschriebene Weise kann man für jeden Lichtstrahl sowohl in der ruhenden Kamera als auch in der bewegten Kamera (die gerade am selben Ort vorbeikommt) den Auftreffpunkt bestimmen.
Jetzt wechseln wir zum Standpunkt eines Beobachters, der sich mit der bewegten Lochkamera mitbewegt. Das Bild hat die gemäß Abb. 3 konstruierte Größe. Im mitbewegten Bezugssystem ist aber die Lochkamera in Ruhe und ist folglich nicht längenkontrahiert (Abb. 4, links). Im Vergleich mit der ruhenden Lochkamera (Abb. 4, rechts) stellt man fest: Die Lichtstrahlen, die das kleinere Bild erzeugen, müssen aus einem kleineren Winkelbereich gekommen sein.

Abb. 4: Im Ruhsystem der bewegten Kamera (links, mit dem in Abb. 3 konstruierten Bild) kommen die Lichtstrahlen steiler von vorn als im Bezugssystem der ruhenden Kamera (rechts, Ausschnitt aus Abb. 2).

Anders ausgedrückt: Ein gegebener Strahl kommt für den bewegten Beobachter stets steiler von vorne als für den ruhenden. Das ist das Phänomen der Aberration. Der Zusammenhang zwischen den beiden Richtungen ist natürlich unabhängig davon, ob die Lichtstrahlen mit einer Lochkamera oder auf andere Weise, etwa im Auge, registriert werden.

Wenn man diese Überlegung mathematisch formuliert, kann man den Zusammenhang zwischen den Richtungen ein und desselben Lichtstrahls oder Photons in den beiden verschiedenen Bezugssystemen herleiten (Aberrationsformel).
Betrachten wir dazu ein Photon, das im Bezugssystem des ruhenden Beobachters unter dem Winkel θ verläuft und in die bewegte Kamera eintritt (Abb. 5, oben). Die Breite der bewegten Kamera ist bei der Geschwindigkeit v auf

$$l = l'\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{1}$$

kontrahiert, wobei l' die Ruhbreite der Kamera bezeichnet.

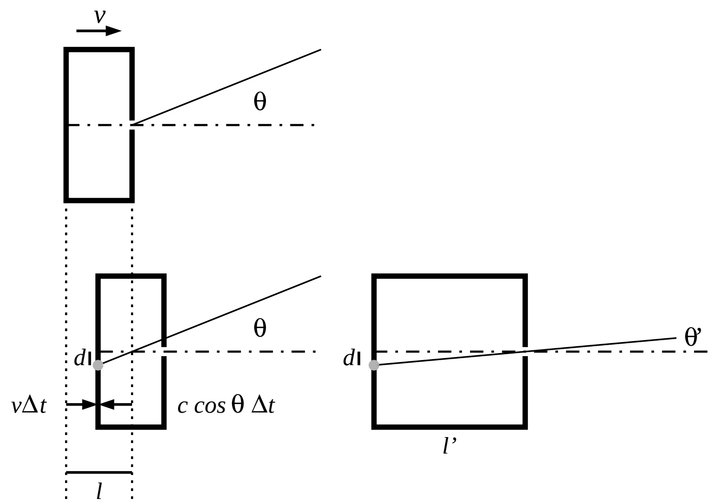

Abb. 5: Zur Herleitung der Aberrationsformel anhand der Bildentstehung in einer Lochkamera. Ein Photon tritt unter dem Winkel θ in eine bewegte Lochkamera ein (oben) und trifft in der Entfernung d von der optischen Achse auf dem Bildfeld auf (unten links). Im Ruhsystem der Kamera schließt man aus der Entfernung d auf einen Eintrittswinkel θ', der kleiner ist als θ (unten rechts).

Das Photon trifft in einem Abstand d von der Bildmitte auf das Bildfeld auf (Abb. 5, unten links), der sich wie folgt berechnen lässt: Die Photonengeschwindigkeit vom Betrag c hat eine Komponente

$$c_{\parallel} = c\cos\theta \tag{2}$$

in Richtung auf das Bildfeld und eine Komponente

$$c_{\perp} = c\sin\theta \tag{3}$$

senkrecht dazu.
Das Photon nähert sich also dem Bildfeld mit der Geschwindigkeit $c_{\parallel}$; das Bildfeld nähert sich seinerseits dem Photon mit der Kamerageschwindigkeit v. Wenn die Wege, die das

Bildfeld und das Photon zurückgelegt haben, sich zum ursprünglichen Abstand l zwischen Lochblende und Bildfeld summieren, trifft das Photon auf:

$$\begin{aligned} v\Delta t + c_{\|}\Delta t &= l'\sqrt{1-v^2/c^2} && (4) \\ \rightarrow \quad \Delta t &= \frac{l'\sqrt{1-v^2/c^2}}{v+c\cos\theta}. && (5) \end{aligned}$$

In dieser Zeit hat sich das Photon um die Strecke

$$d = c\sin\theta\,\Delta t \tag{6}$$

von der optischen Achse entfernt.

Jetzt wechseln wir in das Bezugssystem des mitbewegten Beobachters. Die Kamera ist hier in Ruhe und hat die Breite l' (Abb. 5, rechts unten). Ein Photon, das im Abstand d von der Bildmitte auftrifft, muss unter dem Winkel θ' mit

$$\tan\theta' = \frac{d}{l'} = \frac{\sin\theta\sqrt{1-v^2/c^2}}{v/c+\cos\theta} \tag{7}$$

in die Kamera eingetreten sein.

Ein Strahl, dem der ruhende Beobachter den Winkel θ zuschreibt, verläuft also für den bewegten Beobachter unter dem Winkel θ' nach Gl. (7).

Aufgabe 4

In Abb. 6b im Heftbeitrag (ruhender Beobachter in 4 Kilometern Abstand) erstreckt sich der schwarze Innenbereich über den größten Teil des Himmels: Zwischen Mittelpunkt und Rand liegt ein Winkel von 170 Grad.

Verwenden Sie die Aberrationsformel (7) um zu bestimmen, wie groß der Innenbereich für einen zweiten Beobachter aussieht, der bei seinem Sturz in das Schwarze Loch mit 99,75 % der Lichtgeschwindigkeit an dem ruhenden Beobachter vorbeikommt.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit Abb. 7 des Heftbeitrags. (Dazu muss man wissen, dass jedes Teilbild von Abb. 7 einen horizontalen Blickwinkel von 90 Grad hat.)

3 Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1

An Position A kann der Beobachter die Lichtquelle sehen, denn Lichtstrahlen verlaufen von der Lichtquelle nach außen zum Beobachter. Im Hintergrund erscheint der Innenbereich des Schwarzen Lochs als schwarze Scheibe. Abb. 6 (oben) zeigt diesen Anblick. Der dünne gelbe Ring um das Schwarze Loch ist übrigens ein weiteres Bild der Lichtquelle. Es entsteht durch Lichtstrahlen, die am Schwarzen Loch stark abgelenkt werden (grüne Strahlen in Abb. 3c des Heftbeitrags).

Vom Ort B aus sieht der Beobachter die Lichtquelle ebenfalls, und zwar doppelt. Von der einen Seite erreicht ihn einer der blauen Lichtstrahlen. Die Schar der roten Lichtstrahlen zeigt, dass ihn auch von der anderen Seite Licht von der Lichtquelle erreicht. Es sieht also so aus, als ob rechts und links vom Schwarzen Loch je eine Lichtquelle wäre. In Abb. 6 (Mitte) ist der Anblick simuliert. Das zweite Bild, rechts vom Schwarzen Loch, ist zu einem schmalen Streifen verzerrt.

Auch in Position C sieht der Beobachter die Lichtquelle, obwohl das Schwarze Loch „dazwischen“ ist, denn die Lichtstrahlen werden um das Schwarze Loch herum gelenkt. Weil Beobachter, Schwarzes Loch und Lichtquelle auf einer Achse liegen, kann das Licht den Beobachter gleich gut obenrum wie untenrum erreichen. Lichtstrahlen oberhalb oder unterhalb der Zeichenebene werden auf die gleiche Weise um das Schwarze Loch herumgelenkt – insgesamt sieht der Beobachter bei C die Lichtquelle also als Ring, wie in der Simulation in Abb. 6 (unten).

Aufgabe 2

Es gibt keinen Ort, an dem die Lichtquelle von der schwarzen Scheibe verdeckt wird. Hinter einem Schwarzen Loch kann man nichts verstecken!

Aufgabe 3

Antwort c) ist richtig. Die Planeten spüren die Gravitation, die weit außerhalb einer kugelsymmetrischen Zentralmasse herrscht. Ob diese Zentralmasse die Sonne mit 700000 Kilometern Radius ist oder ein Schwarzes Loch mit einem Horizontumfang von 20 Kilometern, spielt weit draußen keine Rolle.

Aufgabe 4

Ein Strahl, der vom Rand des schwarzen Innenbereichs kommt, schließt mit der Bewegungsrichtung des hineinstürzenden Beobachters den Winkel $\theta = 170^\circ$ ein (im Bezugssystem des ruhenden Beobachters gemessen). Im Bezugssystem des mitbewegten Beobachters trifft dieser Strahl nach Gleichung (7) unter dem Winkel $\theta' = 40^\circ$ ein – für den bewegten Beobachter liegen also nur 40 Grad zwischen Mittelpunkt und Rand des schwarzen Innenbereichs.

Um dieses Ergebnis mit Abb. 7 des Heftbeitrags zu vergleichen, muss man beachten, dass die Kreisscheibe im Bild durch Projektion entsteht. Die Lochkamera mit Breite l' (Abb. 5, unten rechts) bildet den Innenbereich als Kreis mit dem Radius $d' = l' \tan 40^\circ$ ab. Da der

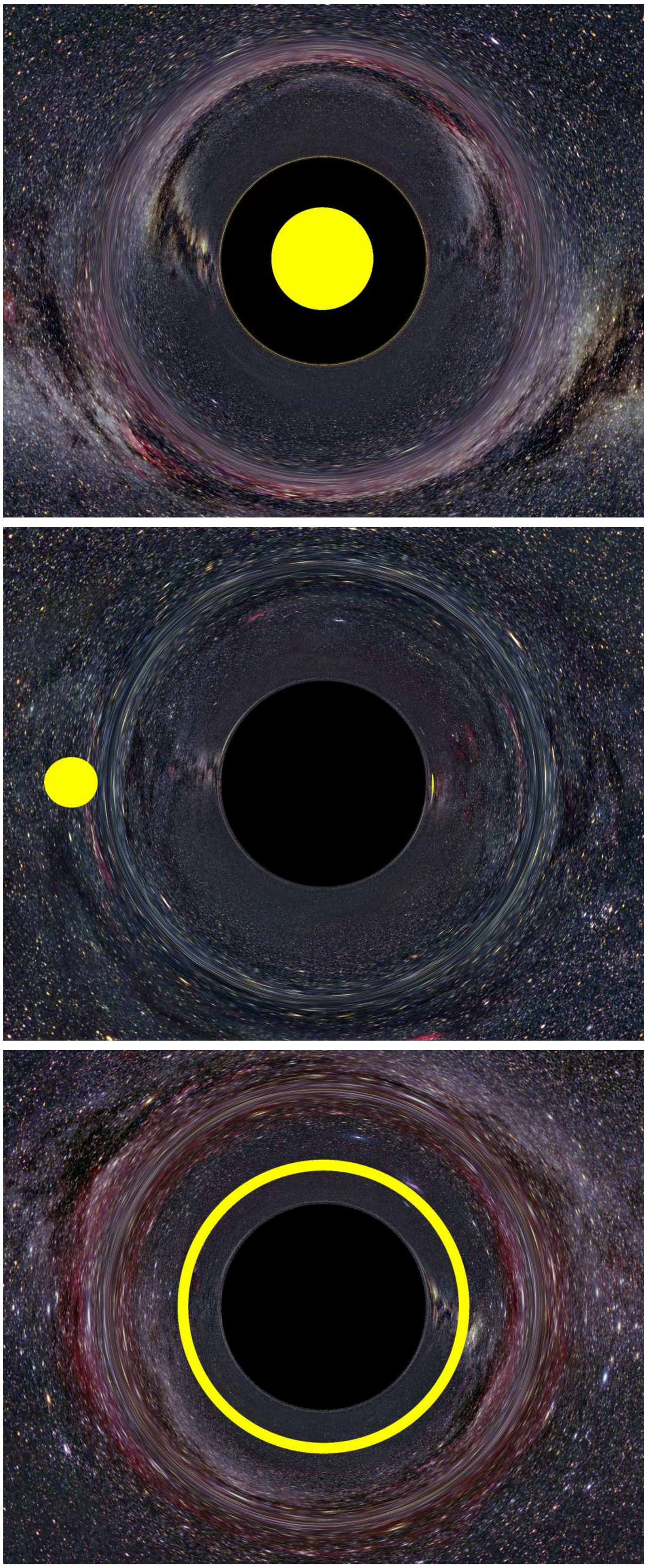

Abb. 6: Zu Aufgabe 1: Blick auf die Lichtquelle von den Positionen A (oben), B (Mitte) und C (unten) aus. Die Lichtquelle ist eine leuchtende Kugel; Beobachter und Quelle befinden sich an den in Abb. 1 eingezeichneten Orten.

horizontale Blickwinkel 90 Grad beträgt, ist der rechte Bildrand 45 Grad vom Bildmittelpunkt entfernt: $b = l' \tan 45^\circ$ ist die halbe Bildbreite Der Kreis sollte also in horizontaler Richtung den Anteil $d'/b = \tan 40^\circ = 0{,}8$ des Bildes einnehmen. Nachmessen zeigt, dass das der Fall ist.

Literatur

[1] K.-H. Lotze: Wissenschaftsdidaktische Variationen über die Lichtablenkung am Sonnenrand, 2005, Praxis der Naturwissenschaften Physik, Heft 4/54, S. 29–37

[2] U. Kraus, C. Zahn: Wir basteln ein Schwarzes Loch
`http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/`
• “Wir basteln ein Schwarzes Loch” (Büchlein mit Bastelbögen, 2004, für Selbstlerner)
• “Wir basteln ein Schwarzes Loch — Unterrichtsmaterialien zur Allgemeinen Relativitätstheorie” (Praxis der Naturwissenschaften Physik, 2005, Heft 4/54, S. 38–43)
• “Wir basteln ein Schwarzes Loch — Making Of” (Vortrag von C. Zahn, 2004, zum Konzept, das hinter diesem Zugang steht)